CP n° 1 : logique, raisonnements et rédaction

1 Notions élémentaires de logique

Principe : les mathématiques sont faites de phrases qui sont soit vraies, soit fausses.

Vocabulaire. *Une phrase mathématique s'appelle une* ***proposition*** *(ou* ***assertion****).*

Définitions. *Soit P et Q sont deux propositions.*

- ▶ *(P* ***et*** *Q) est une proposition qui est vraie à condition que* ***les deux phrases*** *P et Q soient vraies.*
- ▶ *(P* ***ou*** *Q) est une proposition qui est vraie à condition qu'****au moins l'une des deux phrases*** *P ou Q soit vraie.*
- ▶ ***non****(P) (la* ***négation*** *de P) est une proposition qui est*
  - *vraie si P est fausse ;*
  - *fausse si P est vraie.*

Exemples :

- Si $x \in \mathbb{R}$, la négation de "$x \geqslant 0$" est "$x < 0$".
- Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la négation de "f est croissante" est "f n'est pas croissante".

Remarques.

- ▶ *La négation de (P et Q) est : non(P)* ***ou*** *non(Q).*
  Exemple : si $a, b \in \mathbb{R}$, la négation de "a et b sont positifs" est "$a < 0$ ou $b < 0$".
- ▶ *La négation de (P ou Q) est : non(P)* ***et*** *non(Q).*
  Exemple : si $x \in \mathbb{R}$, la négation de "$x \in [0,1]$ ou $x \in [2,3]$" est "$x \notin [0,1]$ et $x \notin [2,3]$".

Définition (Implication)**.** *La proposition ($P \Rightarrow Q$) signifie que le fait que P soit vraie entraîne le fait que Q soit vraie, c'est-à-dire que* ***si*** *P est vraie,* ***alors*** *Q est vraie.*

Exemple : si $n \in \mathbb{N}$, on a l'implication suivante :

$$(n \text{ multiple de } 4) \Longrightarrow (n \text{ pair})$$

Montrons-le. Cela permet de donner un modèle de rédaction.
dem : Supposons que n est un multiple de 4.
Il existe donc un entier naturel k tel que $n = 4k$. On a donc :

$$n = 4k = 2 \times \underbrace{2k}_{\in \mathbb{N}}$$

Cela montre que n est pair.

Vocabulaire.

- ▶ *Lorsque ($P \Rightarrow Q$) est vraie, on dit que :*
  - *P est une* ***condition suffisante*** *pour avoir Q ;*
    Exemple : "n multiple de 4" est suffisant pour avoir "n pair".
  - *Q est une* ***condition nécessaire*** *pour avoir P.*
    Exemple : "n pair" est nécessaire pour avoir "n multiple de 4".
- ▶ *La* ***réciproque*** *de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.*
  Il n'y a bien sûr aucun lien logique général entre une implication et sa réciproque. L'une peut être vraie et l'autre non.

Définition. *On appelle* ***équivalence*** *de P et Q la proposition $\big((P \Rightarrow Q)\, et\, (Q \Rightarrow P)\big)$. Elle se note $(P \Leftrightarrow Q)$, et se lit "P si et seulement si Q" (abréviation officielle : P* ***ssi*** *Q).*
$(P \Leftrightarrow Q)$ signifie que P et Q ont la même valeur de vérité : si l'une est vraie, l'autre aussi, et si l'une est fausse, l'autre aussi.

Lorsque $P \iff Q$ est vraie, P est une ***condition nécessaire et suffisante*** *pour avoir Q (et inversement).*

Cf exo 1

Définition. *La* ***contraposée*** *d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $non(Q) \Rightarrow non(P)$.*

Théorème. *Soit P et Q deux propositions. L'implication $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée $non(Q) \Rightarrow non(P)$ sont équivalentes.*
Autrement dit :

$$\big(P \Rightarrow Q\big) \iff \big(non(Q) \Rightarrow non(P)\big)$$

Exemple : la contraposée de

"s'il a plu la nuit, alors la pelouse est mouillée au matin"

est

"si la pelouse n'est pas mouillée au matin, alors il n'a pas plu pendant la nuit".

2 Quantificateurs

Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.

Notation (Quantificateur universel)**.** *On écrit*

$$\forall x \in E,\, \mathcal{P}(x)$$

pour signifier que pour tous les éléments x de l'ensemble E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Notation (Quantificateur existentiel)**.** *On écrit*

$$\exists x \in E,\, \mathcal{P}(x)$$

pour signifier qu'il existe au moins un élément x dans E tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie. On écrit parfois aussi «$\exists x \in E$ tq $\mathcal{P}(x)$» — «tq» est seulement l'abréviation de «tel que» — ou encore «$\exists x \in E / \mathcal{P}(x)$».

Proposition (Négation des propositions avec quantificateurs)**.**
— *La négation de la proposition «$\forall x \in E$, $\mathcal{P}(x)$» est :*

$$\exists x \in E \ tq \ \text{non}\,(\mathcal{P}(x))\,.$$

— *La négation de la proposition «$\exists x \in E$ tq $\mathcal{P}(x)$» est :*

$$\forall x \in E,\ \text{non}\,(\mathcal{P}(x))\,.$$

Cf exo 2 et 3

Deux principes sacrés dans la rédaction des maths :

1. **Toute variable, tout objet doit être quantifié d'une manière ou d'une autre.**
2. **Les phrases mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques. Cela peut être des symboles — «$\Rightarrow$», «$\Leftarrow$», «$\Longleftrightarrow$» — ou mieux, des mots français : «or», «donc», «ce qui est équivalent à», «d'où», «il suffit que», «on a», «on veut», etc.**

3 Types de raisonnement

3.1 Existence d'un objet, mise en évidence d'un objet

Exemple : **Montrer que :**

$$\exists\, \mathbf{a} \in \mathbb{N} \text{ tq } \frac{\mathbf{a^2-1}}{\mathbf{5}} \in \mathbb{N}.$$

Posons $a := 4$. *(Le «:=» signifie qu'il s'agit d'une définition, c'est une notation non officielle, mais relativement répandue).*
On a

$$\frac{a^2-1}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

donc $\frac{a^2-1}{5} \in \mathbb{N}$.
Remarquons qu'on aurait pu prendre $a := 6$ car $\frac{6^2-1}{5} = 7$.
-

Exercice : **Montrer que :**

$$\forall \mathbf{m} \in \mathbb{N},\ \exists \mathbf{p} \in \mathbb{N} \text{ tq } \mathbf{p} > \mathbf{m^2}.$$

3.2 Raisonnement direct (ou raisonnement déductif)

Le raisonnement direct est le raisonnement déductif scientifique naturel. On part de phrases que l'on considère vraies, soit parce qu'il s'agit de vérités déjà connues, soit parce qu'on les a supposées, et on opère une suite de déductions qui mettent donc en évidence de nouvelles phrases vraies. Les éléments de langage clés sont :

- "ON A" : pour introduire une phrase que l'on sait être vraie.
  Exemple : On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$.
- "OR" : pour introduire un nouvel argument qui vient enrichir le raisonnement en cours.
- "DONC" : le connecteur traditionnel d'une déduction. "AINSI" ou "D'OÙ" conviennent également.

Le raisonnement direct est un raisonnement purement descendant. Il n'est jamais question d'une quelconque remontée logique. C'est ce qui fait sa force : il s'agit du raisonnement le plus confortable et le plus libre. Aucun symbole $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ ne doivent y figurer.

Exemple : **Montrer que :**

$$\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}],\ \sqrt{\mathbf{1-x^2}} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}].$$

Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\begin{array}{lll}
0 \leqslant x \leqslant 1 & \text{donc} \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 & \text{(croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}_+) \\
& \text{donc} \quad -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0 & \text{(multiplication par } -1) \\
& \text{donc} \quad 0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1 & \text{(on a ajouté 1)} \\
& \text{donc} \quad 0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1 & \text{(croissance de la fonction racine carrée)}
\end{array}$$

Remarquons qu'on aurait pu faire cette preuve avec une variable notée «y».

3.3 Raisonnement par disjonction de cas

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on est parfois amené à distinguer plusieurs cas.
Exemple : **montrer que pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, le nombre $\frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$ est un entier naturel.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.
— Si n est pair, alors il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et donc

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

qui est bel et bien un entier naturel.
— Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et donc

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = \frac{(2k+1)\times 2 \times (k+1)}{2} = (2k+1)(k+1)$$

qui est bel et bien un entier naturel.
Finalement, dans tous les cas, $\frac{n(n+1)}{2}$ est bien un entier naturel.

3.4 Interroger une phrase à l'aide d'équivalences

«Définition» : «interroger» une phrase signifie essayer de déterminer quand est-ce qu'elle est vraie, et quand est-ce qu'elle est fausse.
Dans les cas simples, une méthode efficace consiste à utiliser une série d'équivalences logiques jusqu'à avoir clarifié le problème.

Exemple : **résoudre l'équation d'inconnue $\mathbf{s} \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\mathbf{s}}{\mathbf{s^2+1}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.**
Soit $s \in \mathbb{R}$. On procède par équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{4} &\iff 4s = s^2+1 \\ &\iff s^2 - 4s + 1 = 0. \end{aligned}$$

On reconnait une équation en s du second degré dont le discriminant est $16-4=12$ qui est strictement positif. Les solutions sont $\frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3}$ et $\frac{4-\sqrt{12}}{2} = 2-\sqrt{3}$.
L'équation initiale a donc pour solutions $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$.

Exemple : **montrer que :**

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{2} &\iff 2t \leqslant t^2+1 \qquad (t^2+1>0) \\ &\iff t^2 - 2t + 1 \geqslant 0 \\ &\iff (t-1)^2 \geqslant 0 \qquad \text{ce qui est VRAI.} \end{aligned}$$

Par remontée des équivalences, $\frac{t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$ est aussi vrai.
Conclusion :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Remarque : dans la série de «$\iff$», le seul sens qui nous intéresse vraiment est «$\impliedby$».

Autre rédaction possible :
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } (t-1)^2 \geqslant 0 \quad &\text{donc} \quad t^2 - 2t + 1 \geqslant 0 \\ &\text{donc} \quad 2t \leqslant t^2+1 \\ &\text{donc} \quad \frac{t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{car } t^2+1>0 \text{ et } 2>0. \end{aligned}$$

Exercice : **comparer $\frac{\mathbf{1+\sqrt{7}}}{\mathbf{2}}$ et 2.**

3.5 Raisonnement par contraposée

Pour démontrer une implication «$P \Rightarrow Q$», il est parfois plus aisé de démontrer sa contraposée «$(\text{non}Q) \Rightarrow (\text{non}P)$».

Exemple : **Soit n un entier naturel. Montrons que si $\mathbf{n^2}$ est pair, alors n est pair.**
La contraposée de

$$n^2 \text{ est pair} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ est pair}$$

est

$$n \text{ est impair} \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ est impair}$$

Montrons donc cette dernière implication. Supposons que n est impair. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$ et donc

$$n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2\underbrace{(2p^2 + 2p)}_{\in\mathbb{N}} + 1.$$

Ainsi n^2 est bien un entier impair.

3.6 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, il peut être pratique de démontrer que (non$P$) est fausse. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer (non$P$) et à montrer que cela aboutit à une contradiction.

Exemple : **Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.**
Raisonnement par l'absurde : supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe donc deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Quitte à diviser numérateur et dénominateur par le même entier, on peut supposer que p et q n'ont aucun diviseur commun (fraction irréductible). On a alors, en élevant au carré :

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad \text{et donc} \qquad p^2 = 2q^2.$$

Cette dernière égalité montre que p^2 est un entier pair. Or, d'après l'exemple du paragraphe de cours précédent, cela implique que p est lui-même pair. Donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2k$. L'égalité $p^2 = 2q^2$ devient alors :

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad \text{et donc} \qquad q^2 = 2k^2$$

A son tour, q^2 est pair, ce qui implique que q lui-même est pair. Finalement p et q sont pairs, ou autrement dit, ils sont tous les deux divisibles par 2. On a là une **contradiction**, car p et q sont supposés n'avoir aucun diviseur commun.

Conclusion : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3.7 Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit d'une méthode classique pour déterminer les solutions d'un problème. On procède en deux étapes.

- Étape d'analyse : on considère une solution du problème et on déduit des conditions nécessaires portant sur cette solution jusqu'à obtenir une famille explicite de solutions potentielles.
- Étape de synthèse : on regarde si ces solutions potentielles explicitées dans l'analyse sont oui ou non solutions — dit autrement, on s'assure que les conditions nécessaires précédentes sont également suffisantes.

Exemple : **Déterminer tous les réels x tels que $|x+1| = 2x$.**

Avant cela, quelques rappels sur la valeur absolue : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|t|$ est défini par

$$|t| = \begin{cases} t & \text{si } t \geqslant 0 \\ -t & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

En particulier, on a toujours $|t| \geqslant 0$. On a aussi $|t|^2 = t^2$ car :
— si $t \geqslant 0$, alors $|t|^2 = t^2$,
— et si $t < 0$, alors $|t|^2 = (-t)^2 = t^2$.

Revenons au problème posé et commençons par l'analyse.

- **Analyse :** considérons une solution du problème, c'est-à-dire un réel x tel que $|x+1| = 2x$. En passant au carré, on a :

$$\begin{aligned} |x+1|^2 = (2x)^2 \quad &\text{donc} \quad (x+1)^2 = 4x^2 \\ &\text{donc} \quad x^2 + 2x + 1 = 4x^2 \\ &\text{donc} \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

x est donc solution d'une équation du second degré dont le discriminant est $(-2)^2 - 4\times 3\times(-1) = 16$ et dont les deux solutions sont donc $\frac{2+4}{6} = 1$ et $\frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$. D'où :

$$\boxed{x = 1} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

Fin de l'analyse. Remarquons qu'à ce stade, on a montré que ***si*** $|x+1| = 2x$, ***alors*** $x \in \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$. *Autrement dit, l'ensemble des solutions est* ***inclus*** *dans* $\left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$. *La question qui se pose est de savoir si cette inclusion est une égalité, dit autrement, savoir si* 1 *et* $-\frac{1}{3}$ *sont solutions : c'est précisément l'objet de la synthèse.*

► **Synthèse :**
- Si $x = 1$, alors $|x+1| = |2| = 2$, et $2x = 2$ aussi, donc on a bien $|x+1| = 2x$, ce qui signifie que 1 est bien solution.
- Si $x = -\frac{1}{3}$, alors $|x+1| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$ tandis que $2\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$ donc $|x+1| \neq 2x$ donc $-\frac{1}{3}$ n'est pas solution.

Conclusion : l'équation $|x+1| = 2x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet 1 pour unique solution.

Autre exemple, très classique : **montrons que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et ce d'une ≪unique≫ manière.**

Fixons f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'il existe un unique couple (g, h) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f = g + h$, g est paire et h est impaire. Procédons par analyse-synthèse.

► **Analyse :** Considérons un couple de fonctions (g, h) solution du problème. Par définition, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} g(-x) = g(x) & (\text{car } g \text{ est paire}) \\ h(-x) = -h(x) & (\text{car } h \text{ est impaire}) \\ f(x) = g(x) + h(x) & \text{égalité notée (1)} \end{cases}$$

En appliquant (1) à $-x \in \mathbb{R}$, on en déduit donc

$$f(-x) = \underbrace{g(-x)}_{=g(x)} + \underbrace{h(-x)}_{=-h(x)}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x) - h(x) \quad (2).$$

En effectuant $\ll\frac{(1)+(2)}{2}\gg$ (pour éliminer $h(x)$) et $\ll\frac{(2)-(1)}{2}\gg$ (pour éliminer $g(x)$), il vient respectivement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}}.$$

Remarquons qu'à ce stade le seul couple de fonctions (g, h) potentiellement solution est donné par les formules précédentes. Il reste à vérifier que ces fonctions forment bien un couple solution : c'est précidément l'objet de la synthèse.

► **Synthèse :** Posons g et h les deux fonctions définies pour tout réel x par

$$g(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Vérifions maintenant que :
- g est paire, or en effet

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x).$$

- h est impaire, or en effet

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x).$$

- $f = g + h$, or en effet

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Conclusion : il existe bien un unique couple (g, h) tel que $f = g+h$, g est paire et h est impaire. L'analyse a en fait prouvé l'unicité, et la synthèse l'existence.

3.8 Raisonnement par récurrence

Théorème (Principe de récurrence)**.** *Soit $\mathcal{H}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. Si :*
- *$\mathcal{H}(0)$ est vraie. (initialisation)*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $[\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)]$. (hérédité)*

alors $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

dem : procédons par l'absurde en supposant qu'il existe un (ou des) entier(s) naturel(s) n tel que $\mathcal{H}(n)$ est fausse. Notons p le plus petit de ces entiers. D'après l'initialisation, p est non nul car $\mathcal{H}(0)$ est vraie. Ainsi $p \geqslant 1$ et donc $p-1$ est un entier naturel. Puisque $p - 1 < p$, $\mathcal{H}(p-1)$ est vraie. D'après l'hérédité, $\mathcal{H}(p)$ est également vraie . La phrase $\mathcal{H}(p)$ est donc à la fois fausse et vraie : **contradiction.**

Remarque. *On peut faire commencer la récurrence à partir d'un entier naturel n_0 autre que 0. On suppose alors $\mathcal{H}(n_0)$ et «$\forall n \geqslant n_0$, $\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$». La conclusion est alors que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.*

Exemple : **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:**

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On commence par clairement expliciter la proposition dépendant d'un paramètre entier et pour quels entiers on veut la prouver. Ici, on procède ainsi :
Pour tout $n \geqslant 1$, on note :

$$\mathcal{H}(n) \ :\ \ll\ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\ \gg$$

À l'intérieur de $\mathcal{H}(n)$, n est fixé donc il n'y a aucun «$\forall n$» à écrire — surtout pas ! On doit pouvoir remplacer n par une valeur ; ici $\mathcal{H}(4)$ est la phrase «$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4\times 5}{2}$». On vérifie ensuite les deux hypothèses du théorème de récurrence. Ici :

- ▶ initialisation : $\mathcal{H}(1)$ signifie «$1 = \frac{1\times 2}{2}$», ce qui est bien vrai.
- ▶ hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{H}(n)$.
  On fixe un n — quelconque, certes, mais fixé. Il est fixé pendant toute l'hérédité, donc aucun «$\forall n$» ne doit apparaître après.
  Conseil : écrire ce que signifie $\mathcal{H}(n+1)$, pour savoir ce qu'on veut prouver.
  Montrons $\mathcal{H}(n+1)$, c'est-à-dire «$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$».
  Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{d'après } \mathcal{H}(n) \\ &= \frac{n+1}{2}\,(n+2) \end{aligned}$$

  ce qui prouve bien $\mathcal{H}(n+1)$.
- ▶ conclusion : $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Corollaire (Principe de récurrence double)**.** *Soit $\mathcal{H}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n telle que :*
- *$\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont vraies.*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $[\mathcal{H}(n) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(n+1)] \Rightarrow \mathcal{H}(n+2)$.*

Alors $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Idée de la dém : utiliser le principe de récurrence «classique» sur la proposition définie pour tout entier naturel n par $\mathcal{P}(n) = [\mathcal{H}(n) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(n+1)]$.

Corollaire (Principe de récurrence forte, ou récurrence avec prédécesseurs)**.** *Soit $\mathcal{H}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n telle que :*

- *$\mathcal{H}(0)$ est vraie.*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $[\mathcal{H}(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(1) \quad \text{et} \quad \dots \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(n)] \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$.*

Alors $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Idée de la dém : utiliser le principe de récurrence «classique» sur la proposition définie pour tout entier naturel n par $\mathcal{P}(n) = [\mathcal{H}(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(1) \quad \text{et} \quad \dots \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(n)]$.

Exemple : **Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.** Procédons par récurrence forte sur la proposition définie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ par

$$\mathcal{H}(n) \ : \ \ll \ n \text{ est produit de nombres premiers } \gg$$

- ▶ Initialisation : $\mathcal{H}(2)$ est vrai car 2 est premier (il s'agit d'un produit n'ayant qu'un seul facteur).
- ▶ Hérédité : soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{H}(k)$ pour tous les entiers k entre 2 et n. Montrons $\mathcal{H}(n+1)$. On procède par disjonction de cas :
  - — ou bien $n+1$ est premier et $\mathcal{H}(n+1)$ est évident (produit d'un seul facteur),
  - — ou bien $n+1$ n'est pas premier et peut donc être factorisé : il existe deux entiers naturels p et q tels que $n+1 = pq$ et ni p ni q ne vaut 1 ni $n+1$. On a donc $p, q \in [\![2, n]\!]$. On peut donc leur appliquer l'hypothèse de récurrence : ils sont chacun produit de nombres premiers. Il en est donc de même de leur produit $pq = n+1$, ce qui prouve $\mathcal{H}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{H}(n)$ est vrai pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

4 Vocabulaire ensembliste

Un ensemble est intuitivement une collection d'objets, sans ordre.

4.1 Quelques définitions et notations

- Soit E un ensemble. On dit qu'un objet x est un **élément** de E lorsque x appartient à E. On note alors : $x \in E$. Dans le cas contraire où x n'appartient pas à E, on note : $x \notin E$.
- On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B lorsque tout élément de A est un élément de B. On note alors $A \subset B$. Autrement dit :

$$\big(A \subset B\big) \iff \big(\forall x \in A,\ x \in B\big)$$

- On dit que deux ensembles A et B sont **égaux** lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$. On note alors $A = B$.
- Si E est un ensemble, on dit que A est un **sous-ensemble** de E (ou une **partie** de E) lorsque $A \subset E$.
  L'ensemble des parties de E est notée $\mathcal{P}(E)$.
- L'**ensemble vide** est noté $\varnothing$.

4.2 Méthodes de définition d'un ensemble

Pour définir un ensemble, on utilise des accolades : $\{\dots\}$. Trois méthodes sont utilisées.

1. Donner une **liste explicite** des éléments.
   ex : l'ensemble qui contient 2, 3 et 6 est $\{2, 3, 6\}$, mais aussi $\{6, 3, 2\}$, ou encore $\{6, 3, 3, 6, 2, 3\}$.

2. Donner un **paramétrage** des éléments de l'ensemble.
   Exemples :
   - l'ensemble des entiers impairs :
   $$\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
   Cet ensemble se lit "ensemble des $2k+1$ **où** $k \in \mathbb{Z}$". Il s'agit aussi de l'ensemble $\{2B+1 \mid B \in \mathbb{Z}\}$;

- l'ensemble des complexes dont l'image est sur la droite d'équation $x = 2$:

$$\{2 + it \mid t \in \mathbb{R}\}$$

- l'ensemble des entiers du type $3m^2 + n^3$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\{3m^2 + n^3 \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{ou} \qquad \{3p^2 + k^3 \mid p \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Remarque : il y a de nombreux ensembles pour lesquels il n'y a pas de paramétrage connu (par exemple l'ensemble des nombres premiers).

3. Utiliser une **propriété** qui caractérise les éléments de l'ensemble. L'ensemble :

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

est l'ensemble des x de E tels que la phrase $P(x)$ est vraie. La barre centrale se lit ici **"tel que"**. Exemples :

- l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2 + e^x = 12$ est noté :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + e^x = 12\} \qquad \text{ou encore} \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid t^2 + e^t = 12\}$$

- l'ensemble des entiers impairs :

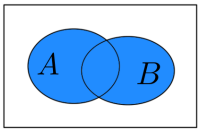
$$\left\{m \in \mathbb{Z} \mid \frac{m+1}{2} \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \text{ou encore} \qquad \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \,\text{tq}\, m = 2k+1\}$$

4.3 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On appelle :

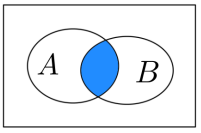
- l'**union** (ou la réunion) de A et B l'ensemble :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \boxed{\text{ou}}\, x \in B\}$$



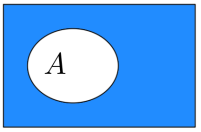
- l'**intersection** de A et B l'ensemble :

$$A \cap B = \left\{x \in E \mid x \in A \boxed{\text{et}}\, x \in B\right\}$$



- le **complémentaire** de A dans E l'ensemble :

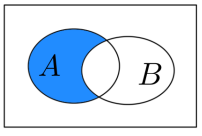
$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$



Cet ensemble peut aussi être noté A^C.

- la **différence** de A et B l'ensemble :

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$



On remarque que $\overline{A} = E \setminus A$.

Remarque. *De la même façon que pour des propositions P et Q on a :*

$$non(P \text{ ou } Q) \iff \big(non(P) \text{ et } non(Q)\big) \qquad et \qquad non(P \text{ et } Q) \iff \big(non(P) \text{ ou } non(Q)\big)$$

on a pour des ensembles A et B :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad et \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

4.4 Produit cartésien

- Soit E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, et on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E,\ y \in F\}$$

ex : $(-5, 2 + 3i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$.

- De façon plus générale, si $E_1, \ldots, E_p$ désignent p ensembles, l'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ avec $x_1 \in E_1, \ldots, x_p \in E_p$, est appelé produit cartésien des ensembles $E_1, \ldots, E_p$. On le note $E_1 \times \cdots \times E_p$.

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \ldots, x_p) \mid x_1 \in E_1, \ldots, x_p \in E_p\}$$

ex : $(28, \sqrt{2}, 5i - 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

- Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$$

ex : $(-\frac{3}{2}, \pi, 5\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3$.